C. R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série I, p. 911-916, 1990

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Quelques remarques sur l'homogénéisation des matériaux élastiques nonlinéaires

Giuseppe GEYMONAT, Stefan MÜLLER et Nicolas TRIANTAFYLLIDIS

Résumé — Nous établissons tout d'abord quelques résultats généraux d'homogénéisation pour l'élasticité linéarisée. Nous démontrons ensuite pour l'élasticité nonlinéaire un résultat liant l'homogénéisation de l'opérateur linéarisé à la linéarisation de l'opérateur homogénéisé.

Some remarks on the homogenization of nonlinearly elastic materials

Abstract — *At first we prove some general results on the homogenization of linearized elasticity. Then we establish, in the case of non linear elasticity, a link between the homogenization of the linearized operator and the linearization of the homogenized operator.*

Abridged English Version — A fundamental problem in the study of nonlinearly elastic periodic composites is to understand the intimate connection between bifurcation at the microscopic level and loss of rank-one convexity at the macroscopic level. Abeyaratne-Triantafyllidis [1] have studied numerically the behavior of an elastomeric composite with periodic holes whose matrix is polyconvex in the sense of Ball [3] and hence always rank-one convex. They have found that the homogenized incremental moduli of the composite lose their rank-one convexity at adequate high macroscopic strains. Next, in the case of a finitely strained layered nonlinear elastic composite, Triantafyllidis-Maker [11] have shown that bifurcation of the composite at a wavelength much larger than the unit cell size corresponds to the loss of rank-one convexity in the homogenized incremental moduli.

The first purpose of this Note is a careful study of the homogenization for linearized elasticity. In fact the results obtained apply to general, symmetric, second order, strongly elliptic systems in divergence form $-\operatorname{div}(\mathbb{L}(x)\nabla.)$ where the 4-tensor $\mathbb{L}$ satisfies (1.1)-(1.4). The main difficulty is that in general under these assumptions the solutions may not be *a priori* bounded in H^1, *see* [7]. The difficulty is overcome by introducing the quantity Λ defined by (1.6) which measures the overall coercivity of $\mathbb{L}$. We show (Theorem 1.1) that the equations have the usual homogenization limit if $\Lambda>0$, while no hope of convergence is possible for $\Lambda<0$ (Prop. 1.2). Moreover, the homogenized 4-tensor $\mathbb{M}$ has the usual variational characterization (1.7) and is strongly elliptic (1.8). One result which is particularly useful in the applications, is that Λ can equivalently be characterized in terms of Bloch waves ($e^{i\omega x}\mathbf{q}(x)$), $\mathbf{q}$ being periodic on the unit cell, see Proposition 1.3. This result permits the study of the linearized composite by analyzing only one cell. When $\Lambda=0$, we introduce (Prop. 1.4) some others measures of the coercivity of $\mathbb{L}(x)$, (1.8)-(1.10), which ensure that the variational definition (1.7) of $\mathbb{M}$ has a meaning. Then we prove [Theorem 1.3 (i)] that Γ-convergence holds for $\Lambda=0$. Moreover, in this case the whole space problem $-\operatorname{div}((\mathbb{L}(x)\nabla\mathbf{u}(x))=0$ on $\mathbb{R}^N$, admits a nontrivial solution. According to the character of that solution: Bloch wave, resp. long wavelength limit [or equivalently, by Prop. 1.4 (i), shear band], the linearly homogenized problem retains, resp. looses, strong ellipticity [Theorem 1.3 (ii) and (iii)].

In section 2 the results from the linearized theory are examined in the perspective of the full nonlinear theory. We study in particular the question whether homogenization and

Note présentée par Luc TARTAR.

0764-4442/90/03110911 $ 2.00

linearization commute, *i.e.* whether the second order derivatives of the nonlinearly homogenized energy $\bar{W}$, obtained from the materials energy density W as indicated in [9], can be obtained by studying the homogenized energy of an associated linear problem. We show (Theorem 2.1) that under certain technical hypotheses (H 1), $\bar{W}$ has the expected second order Taylor expansion and that loss of strong ellipticity for the homogenization of the linearized problems implies loss of ellipticity for $\bar{W}$. To complement these results we also show, (2.9), that for strongly convex W, with quadratic growth, homogenization and linearization indeed commute and that no technical assumption like (H 1) is required in that case.

---

1. Homogénéisation pour l'élasticité linéarisée. — 1.1. Soit $\mathbb{L}(x)$ un champ tensoriel réel d'ordre 4, Y-périodique en x, avec $Y:=[0, 1]^N$, $N \geqq 2$, vérifiant :

(1.1) $$\mathbb{L}(x+z)=\mathbb{L}(x), \qquad \forall z \in \mathbb{Z}^N,$$

(1.2) $$(\mathbb{L}(x)A, B)=(A, \mathbb{L}(x)B) \quad \text{pour toutes matrices } N \times N \text{ réelles } A, B \ (^1)$$

(1.3) $$|(\mathbb{L}(x)A| \leqq |A| \quad \text{pour toute matrice } N \times N \text{ réelle } A,$$

(1.4) $$(\mathbb{L}(x)\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}, \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) \geqq c\,|\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}|^2, \qquad c>0, \text{ pour tous } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N.$$

Soit λ la meilleure constante d'ellipticité du matériau non homogène, *i.e.* :

(1.5) $$\lambda := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in Y} \ \min_{\substack{|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1\\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N}} (\mathbb{L}(x)\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}, \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}).$$

Soient Ω borné lipschitzien, $\mathbf{v}_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ donnés,

$$a^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega (\mathbb{L}(x/\varepsilon)\nabla\mathbf{u}(x), \nabla\mathbf{v}(x))\,dx), \qquad I^\varepsilon(\mathbf{u}) := (1/2)\,a^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}-\mathbf{v}_0 \rangle$$

$$\mathbb{K}_{\mathbf{v}_0} := \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N);\ \mathbf{u}-\mathbf{v}_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \}$$

et soit $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathbb{K}_{\mathbf{v}_0}$ solution du problème de minimisation :

(Q^ε) $$I^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \leqq I^\varepsilon(\mathbf{u}) \qquad \textit{pour tout } \mathbf{u} \in \mathbb{K}_{\mathbf{v}_0}.$$

Les hypothèses faites n'entraînant pas la coercivité uniforme des formes a^ε, *cf.* Le Dret [7], on mesure la coercivité globale du tenseur $\mathbb{L}(x)$ par :

(1.6) $$\Lambda := \inf\{ Q(\nabla\mathbf{u}; \mathbb{R}^N) \mid \mathbf{u} \in D(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \}$$

où

$$Q(A; \mathscr{B}) := \left(\int_{\mathscr{B}} (\mathbb{L}(x)A(x), A(x))\,dx \right) \Big/ \int_{\mathscr{B}} (A(x), A(x))\,dx.$$

En adaptant les idées de Tartar, *cf.* [10] et [11], on montre :

Théorème 1.1. — *Supposons* $\Lambda > 0$. (i) *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *le problème de minimisation* (Q^ε) *a une solution unique* $\mathbf{v}^\varepsilon$ *et il existe* $C > 0$ *telle que* $\|\mathbf{v}^\varepsilon\|_{H^1} \leqq C\{ \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{v}_0\|_{H^1} \}$.

(ii) *Pour* $\varepsilon \to 0$ *on a* $\mathbf{v}^\varepsilon \to \mathbf{v}$ *faiblement dans* $H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *avec* $\mathbf{v}$ *minimum de*

$$I(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \int_\Omega (\mathbb{M}\nabla\mathbf{u}(x), \nabla\mathbf{u}(x))\,dx - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}-\mathbf{v}_0 \rangle,$$

où le tenseur symétrique et constant $\mathbb{M}$ *est caractérisé par* (2) :

(1.7) $$(\mathbb{M}F, F) := \inf\left\{ \int_Y (\mathbb{L}(x)(F+\nabla\mathbf{q}), F+\nabla\mathbf{q})\,dx \,\middle|\, \mathbf{q} \in H^1_\# \right\}.$$

De plus on a :

(1.8) $$(\mathbb{M}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) \geqq \Lambda\,|\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}|^2 \quad \textit{pour tout } \mathbf{a},\ \mathbf{b}\in\mathbb{R}^N.$$

(iii) *Le même résultat est valable si on remplace* $\mathbf{v}_0$ *par* $\mathbf{v}_0^\varepsilon \to \mathbf{v}_0$ *fortement dans* $H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^N)$ *et* $\mathbf{f}$ *par* $\mathbf{f}^\varepsilon \to \mathbf{f}$ *fortement dans* $H^{-1}(\Omega;\ \mathbb{R}^N)$.

PROPOSITION 1.2. — *Soit* $\Lambda<0$. *Pour tout* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ *assez petit, il existe* $\mathbf{w}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega;\ \mathbb{R}^N)$ *tel que* $\|\nabla\mathbf{w}^\varepsilon\|_{L^2}=1$, $a^\varepsilon(\mathbf{w}^\varepsilon,\ \mathbf{w}^\varepsilon)\leqq\Lambda/2<0$ *et donc* I^ε *n'est pas bornée inférieurement sur* $\mathbb{K}_{\mathbf{v}_0}$.

La constante Λ peut être aussi calculée en termes d'ondes de Bloch $(e^{i\omega x}\mathbf{q})$:

PROPOSITION 1.3. — *On a :* $\Lambda=\Lambda_1=\Lambda_2=\Lambda_3$, *où* (3)

$$\Lambda_1 := \inf\{Q(\nabla(e^{i\omega x}\mathbf{q});\ Y)\,|\,\mathbf{q}\in\mathscr{H}^1_\#,\ \omega\in[0,\ 2\pi[^N\}$$
$$\Lambda_2 := \inf\{Q(\nabla(e^{i\omega x}\mathbf{q});\ kY)\,|\,\mathbf{q}\in\mathscr{H}^1_{k\#},\ \omega\in\mathbb{R}^N,\ k\in\mathbb{N}\}$$
$$\Lambda_3 := \inf\{Q(\nabla\mathbf{q};\ kY)\,|\,\mathbf{q}\in\mathscr{H}^1_{k\#},\ k\in\mathbb{N}\}.$$

1.2. L'étude du cas critique $\Lambda=0$ utilise les constantes suivantes qui mesurent plus finement la coercivité de $\mathbb{L}$:

(1.8) $$\Lambda_4 := \inf\{Q(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\nabla\mathbf{q};\ Y)\,|\,\mathbf{a}\in\mathbb{C}^N,\ \mathbf{q}\in\mathscr{H}^1_\#\}$$

(1.9) $$\Lambda_5 := \liminf_{\omega\to 0}\ \inf\{Q(\nabla(e^{i\omega x}\mathbf{q});\ Y)\,|\,\mathbf{q}\in\mathscr{H}^1_\#\}$$

(1.10) $$\Lambda_6 := \inf\{Q(\nabla\mathbf{q};\ Y)\,|\,\mathbf{q}\in H^1_\#\}.$$

Les fonctions de (1.8) peuvent être associées à des bandes de cisaillement (modulo une contribution périodique).

PROPOSITION 1.4. — (i) *On a* $\Lambda\leqq\Lambda_4=\Lambda_5\leqq\Lambda_6\leqq\lambda$.

(ii) *Si* $\Lambda\geqq 0$, *alors pour tout* $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ *et pour toute matrice* F *la fonctionnelle* (4)

$$\mathscr{L}_k(F,\ \mathbf{q}) := \fint_{kY} (\mathbb{L}(x)(F+\nabla\mathbf{q}),\ F+\nabla\mathbf{q})\,dx$$

est faiblement séquentiellement s.c.i. sur $\mathscr{H}^1_{k\#}$; *le tenseur* $\mathbb{M}_k$ *défini par* (5)

$$(\mathbb{M}_k F,\ F) := \inf\{\mathscr{L}_k(F,\ \mathbf{q})\,|\,\mathbf{q}\in\mathscr{H}^1_{k\#}\}$$

vérifie pour tous $\mathbf{a},\ \mathbf{b}\in\mathbb{R}^N$: $(\mathbb{M}_k\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\mathbb{M}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\geqq 0$.

(iii) *Si* $\Lambda_4\geqq 0$, *alors :* $(\mathbb{M}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\geqq\Lambda_4\,|\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}|^2$.

(iv) *Si* $\Lambda_6>0$, *alors* $\mathscr{L}_1(F,\ \mathbf{q})$ *atteint son minimum sur* $H^1_\#$ *pour toute matrice* F.

La coercivité du tenseur $\mathbb{M}$ est mesurée par :

(1.11) $$\mu := \min_{\substack{|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1\\ \mathbf{a},\ \mathbf{b}\in\mathbb{R}^N}} (\mathbb{M}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}).$$

THÉORÈME 1.5. — *Supposons* $\Lambda\geqq 0$, $\Lambda_6>0$. (i) *Les fonctionnelles* $a^\varepsilon(\mathbf{u},\ \mathbf{u})$ *sur* $\mathbb{K}_{\mathbf{v}_0}$ *sont* Γ-*convergentes, par rapport à la convergence faible des suites dans* $H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^N)$, *vers :* $a(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) := \int_\Omega (\mathbb{M}\,\nabla\mathbf{u}(x),\ \nabla\mathbf{u}(x))\,dx$ *où* $\mathbb{M}$ *est défini par* (1.7).

(ii) *Si* $\Lambda=0$, $\Lambda_4>0$, *alors* $\mathbb{M}$ *est fortement elliptique, l'infimum dans* (1.7) *est atteint et il existe* $\omega\neq 0\ (\mathrm{mod}\,(2\pi\mathbb{Z})^N)$ *et* $\mathbf{q}\in H^1_{k\#}$ *avec* $\nabla\mathbf{q}\not\equiv 0$ *tels que*

$$-\mathrm{div}(\mathbb{L}(x)\,\nabla(e^{i\omega x}\mathbf{q}))=0 \quad \textit{sur } \mathbb{R}^N.$$

(iii) *Si* $\Lambda=\Lambda_4=0$, *alors il existe* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ *et* $\mathbf{q}\in H^1_{k\#}$ *avec* $\nabla\mathbf{q}\not\equiv 0$ *tels que*

$$-\operatorname{div}(\mathbb{L}(x)(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\nabla\mathbf{q}))=0 \quad sur \ \mathbb{R}^N.$$

Avec ce choix de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *on a :* $(\mathbb{M}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=0$.

Le résultat précédent établit la connexion entre la stabilité au niveau microscopique et la stabilité au niveau macroscopique. Il montre que la perte d'ellipticité pour le matériau homogénéisé est équivalente à l'existence de solutions de type ondes de Bloch à grande longueur d'onde ($\omega\to 0$) pour l'équation $-\operatorname{div}(\mathbb{L}(x)\nabla\mathbf{u})=0$ sur $\mathbb{R}^N$.

COROLLAIRE. — *On a* $\mu\geqq\Lambda_4$ *et* $\mu=0$ *si* $\Lambda_4=0$.

Remarques 1. — L'étude du cas $\Lambda=\Lambda_6=0$ est moins complète car on sait seulement prouver des résultats analogues à (ii) et (iii) du théorème 1.4 concernant le tenseur $\mathbb{M}$ défini formellement par (1.7).

2. Les définitions et résultats précédents se simplifient pour un matériau stratifié, *i. e.* un matériau dont les propriétés élastiques varient seulement dans une direction.

3. Les résultats précédents s'appliquent évidemment à un système symétrique quelconque du second ordre en forme de divergence et fortement elliptique.

2. HOMOGÉNÉISATION NONLINÉAIRE, BIFURCATION MICROSCOPIQUE ET PERTE MACROSCOPIQUE DE LA RANG-1 CONVEXITÉ. — A l'aide de la Γ-convergence, Braides [5] et Müller [9] ont étudié l'homogénéisation des matériaux hyperélastiques dont la densité d'énergie $W(x, F)$ est Y-périodique en x, avec $Y:=[0, 1]^N$, $N\geqq 2$, et vérifie :

$$W(x+z, F)=W(x, F), \qquad \forall z\in\mathbb{Z}^N, \tag{3.1}$$

$$c|F|^p\leqq W(x, F)\leqq C(1+|F|^p) \quad \text{avec} \quad c>0 \quad \text{et } p>1, \tag{3.2}$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial F}(x, F)\right|\leqq C(1+|F|^{p-1}). \tag{3.3}$$

Précisément, si pour $\mathbf{u}\in H^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, Ω borné lipschitzien, on pose :

$$I^\varepsilon(\mathbf{u}):=\int_\Omega W(x/\varepsilon, \nabla\mathbf{u}(x))\,dx,$$

alors $I^\varepsilon(\mathbf{u})$ Γ-converge, par rapport à la convergence faible des suites dans $H^{1,p}$, vers

$$I(\mathbf{u}):=\int_\Omega \bar{W}(\nabla\mathbf{u}(x))\,dx$$

où la densité d'énergie $\bar{W}(F)$ dépend seulement du gradient de déformation et est donnée par :

$$\bar{W}(F):=\inf_{k\in\mathbb{N}}\hat{W}^k(F) \qquad \text{avec} \quad \hat{W}^k(F):=\inf\left\{\int_{kY} W(x, F+\nabla\mathbf{q})\,dx \,\middle|\, \mathbf{q}\in H^{1,p}_{k\#}\right\}$$

où $H^{1,p}_{k\#}$ désigne l'espace des fonctions de $H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ périodiques de période kY. Marcellini [8] a montré que si $W(x, F)$ est convexe en F, alors $\bar{W}(F)=\hat{W}^1(F)$, tandis que Müller [9] a donné un exemple où $\bar{W}(F)<\hat{W}^1(F)$. Grâce à des résultats abstraits de Γ-convergence, on sait que $\bar{W}(F)$ est toujours rang-1 convexe.

La stricte rang-1 convexité de $\bar{W}(F_0)$ signifie la convexité stricte de la fonction $t\to\bar{W}(F_0+t\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$ pour tous $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$. Si $\bar{W}$ est deux fois dérivable il suffit donc de montrer qu'il existe $c>0$ tel que : $((\partial^2\bar{W}/\partial F^2)(F_0)\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\geqq c|\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}|^2$ pour tous $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^N$. Pour éviter des difficultés techniques concernant cette dérivabilité pour des intégrandes $W(x, F)$ générales, nous allons étudier les développements asymptotiques du second ordre de $W(F_0+t\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$ pour $t\to 0$. Dans la suite nous utiliserons l'hypothèse :

(H 1) *Il existe* $t_0>0$ *tel que pour tout* $0\leqq t\leqq t_0$, *et tout* $H=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ *avec* $|H|=1$ *on a*

$$\bar{W}(F_0+tH)=\hat{W}^1(F_0+tH) \tag{2.4}$$

et il existe $\varphi_{F_0+tH}\in W_{\#}^{1,\infty}$ *vérifiant :* $\int_Y \varphi_{F_0+tH}(x)\,dx=0$,

$$\bar{W}(F_0+tH)=\int_Y W(x,\,F_0+tH+\nabla\varphi_{F_0+tH}(x))\,dx, \tag{2.5}$$

$$\|\varphi_{F_0+tH}-\varphi_{F_0}\|_{W^{1,\infty}}=o(1) \qquad \textit{pour}\ t\to 0. \tag{2.6}$$

La condition (2.4) signifie que près de F_0 l'énergie homogénéisée est donnée par un problème auxiliaire sur *une seule* période Y, tandis que (2.6) signifie qu'il n'y a pas de bifurcation discontinue des minimiseurs.

Le tenseur élastique linéarisé en F_0 est défini par :

$$\mathbb{L}_{F_0}(x):=\frac{\partial^2 W}{\partial F^2}(x,\,F_0+\nabla\varphi_{F_0}(x)). \tag{2.7}$$

Comme dans le paragraphe 1 on définit les constantes $\Lambda(F_0)$, $\Lambda_4(F_0)$, $\Lambda_6(F_0)$ associées à $\mathbb{L}_{F_0}$. De même si $\Lambda_4(F_0)\geqq 0$, on définit $\mathbb{M}_{F_0}$ qui vérifie pour tous $\mathbf{a},\,\mathbf{b}\in\mathbb{R}^N$:

$$(\mathbb{M}_{F_0}\mathbf{a}\otimes\mathbf{b},\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\geqq\Lambda_4(F_0)\,|\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}|^2.$$

Nous définissons aussi

$$\bar{\sigma}(F_0):=\int_Y \frac{\partial W}{\partial F}(x,\,F_0+\nabla\varphi_{F_0}(x))\,dx.$$

THÉORÈME 2.1. — *Supposons que* $W(x,F)$ *vérifie* (2.1), (2.2), (2.3), *que* $W(x,\,.)$ *est de classe* C^3 *et* $|\partial^3 W(x,F)/\partial F^3|\leqq h(F)$ *avec* $h(F)$ *localement borné et que* (H 1) *est satisfaite.*

(i) *Si* $\Lambda_4(F_0)>0$, *alors pour tout* $H=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ *avec* $|H|=1$ *on a*

$$\bar{W}(F_0+tH)=\bar{W}(F_0)+(\bar{\sigma}(F_0),\,H)\,t+\frac{1}{2}(\mathbb{M}_{F_0}H,\,H)\,t^2+o(t^2) \qquad \textit{pour}\quad t\to 0. \tag{2.8}$$

(ii) *Si* $\Lambda_4(F_0)=0$, $\Lambda_6(F_0)>0$, *alors il existe* $H=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ *avec* $|H|=1$ *tel que :*

$$\bar{W}(F_0+tH)=\bar{W}(F_0)+(\bar{\sigma}(F_0),\,H)\,t+o(t^2) \qquad \textit{pour}\quad t\to 0.$$

Remarques 1. — (ii) entraîne que $\bar{W}(F_0)$ perd la stricte rang-1 convexité dans la direction $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$. On a encore ce résultat quand (2.4) et (2.5) sont seulement satisfaites pour $t=0$.

2. On peut affaiblir l'hypothèse (H 1) quand $\Lambda(F_0)>0$. Les conclusions du théorème 2.1 peuvent alors être appliquées à un chemin de matrices F_s de rang 1 qui dépend continûment d'un paramètre de charge (correspondant, par exemple, à une compression uniaxiale croissante); dans ce cas, le développement (2.8) est valable suivant F_s tant que $\Lambda(F_s)>0$. Quand $\Lambda(F_{s^*})=0$ on a deux possibilités : ou bien $\Lambda_4(F_{s^*})=0$, l'énergie homogénéisée perd la stricte rang-1 convexité [théorème 2.1 (ii)] et l'équation linéarisée a une solution de type bande de cisaillement [théorème 1.5 (iii)]; ou bien $\Lambda_4(F_{s^*})>0$ et alors l'équation linéarisée a une solution de type onde de Bloch [théorème 1.5 (ii)] avec $\omega\neq 0$, ce qui correspond à la possibilité d'une bifurcation du composite nonlinéaire à longueur de mode comparable à la taille de la cellule unitaire. Dans ce dernier cas il est plausible que $\bar{W}(F_{s^*})$ soit encore strictement rang-1 convexe mais notre démonstration requiert l'hypothèse plus restrictive (H 1) (avec F_0 remplacé

par F_{s*}). On obtient ainsi une confirmation des résultats de [11] pour les matériaux stratifiés.

3. Dans le cas des intégrandes convexes, les relations entre homogénéisation et linéarisation peuvent être rendues complètement rigoureuses sans recours à une hypothèse implicite comme (H 1). Un premier résultat dans cette direction est montré dans le cas scalaire par Attouch [2]. Dans le cas vectoriel, supposons $W(x, F)$ strictement convexe, de classe C^2, vérifiant (2.1)-(2.3) avec $p=2$ (et donc, *cf.* [8], $\bar{W}(F)=\hat{W}^1(F)$). On montre alors que la densité d'énergie homogénéisée $\bar{W}(F)$ est aussi de classe C^2 et on a :

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial F^2}(F_0)\,G,\, G\right)=(\mathbb{M}_{F_0}G,\, G). \tag{2.9}$$

4. Les résultats précédents s'appliquent en particulier au cas d'un composite stratifié. Dans [6] on explicite les calculs des constantes Λ, Λ_5, Λ_6 et μ quand le matériau est dans un état de déformations planes avec un des axes principaux du tenseur des contraintes parallèle à la direction de stratification. Ces constantes sont calculées en fonction de la contrainte appliquée dans la direction de stratification. On a ainsi des renseignements analogues à ceux obtenus pour le cas incompressible dans [11].

La recherche de S. M. a bénéficié en partie du grant NSF n° DMS-9002679.

(1) On note (A, B) le produit scalaire usuel des matrices A et B et $|\,.\,|$ la norme associée.

(2) On note $H^1_{k\#}$ l'espace des fonctions de $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ périodiques de période kY.

(3) On étend de façon naturelle la définition de Q aux fonctions à valeurs complexes et on désigne par $\mathscr{H}^1_{k\#}$ le complexifié de $H^1_{k\#}$. Remarquons par ailleurs que si X est un sous-espace de $H^1(A;\mathbb{R}^N)$ et $\mathscr{X}$ son complexifié, alors $\inf\{Q(\nabla \mathbf{u};A)\,|\,\mathbf{u}\in X\}=\inf\{Q(\nabla\mathbf{u};A)\,|\,\mathbf{u}\in\mathscr{X}\}$.

(4) On définit $\displaystyle{-\!\!\!\!\!\!\int_A} := 1/\mathrm{mes}(A)\displaystyle\int$.

(5) On a $\mathbb{M}_1=\mathbb{M}$ défini par (1.7).

Note remise le 22 octobre 1990, acceptée le 23 octobre 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. A. ABEYARATNE et N. TRIANTAFYLLIDIS, *J. Appl. Mech.*, 51, 1984, p. 481-486.

[2] H. ATTOUCH, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman, 1984.

[3] J. BALL, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 63, 1977, p. 337-403.

[4] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, 1978.

[5] A. BRAIDES, *Rend. Acc. Naz. Sc. XL, Memorie di Matematica*, 9, 1985, p. 313-322.

[6] G. GEYMONAT, S. MÜLLER et N. TRIANTAFYLLIDIS (en préparation).

[7] H. LE DRET, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 105 A, 1987, p. 77-82.

[8] P. MARCELLINI, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 117, 1978, p. 139-152.

[9] S. MÜLLER, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 99, 1987, p. 189-212.

[10] E. SANCHEZ-PALENCIA, Nonhomogeneous Media and Vibration Theory, *Lecture Notes in Physics*, 127, Springer-Verlag, 1980.

[11] N. TRIANTAFYLLIDIS et R. N. MAKER, *J. Appl. Mech.*, 52, 1985, p. 794-800.

G. G. : *Laboratoire de Mécanique et Technologie, E.N.S. de Cachan/C.N.R.S./Université Paris-VI,* 61, *avenue du Président Wilson,* 94235 *Cachan Cedex;*

S. M. : *Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, Beringstr.* 4, *D*-5300 *Bonn, R.F.A;*

N. T. : *Department of Aerospace Engineering, The University of Michigan, Aerospace Engineering, Ann Arbor, Michigan, U.S.A.*, 48109-2140.