C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série II *b*, p. 971–976, 1999
Mécanique des solides et des structures/*Mechanics of solids and structures*

MÉCANIQUE / MECHANICS

Diffraction acoustique inverse de fissure plane : solution explicite pour un solide borné

Huy Duong BUI[a,b], Andrei CONSTANTINESCU[a], Hubert MAIGRE[a]

[a] Laboratoire de mécanique des solides, UMR CNRS 7649, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex France
E-mail : bui ; constant ; maigre@lms.polytechnique.fr
[b] Électricité de France, 92141 Clamart, France

(Reçu le 13 avril 1999, accepté le 26 avril 1999)

Résumé. Ce travail concerne le problème inverse de diffraction acoustique par une fissure plane dans un milieu borné, excité par un signal transitoire de forme quelconque appliqué à sa frontière. On montre que les données exactes surabondantes à la frontière, constituées par le couple signal et réponse, permettent la reconstruction explicite et du plan et de la géométrie de la fissure. Cette solution démontre « l'identifiabilité » exacte de la fissure par des mesures surabondantes à la frontière, cela pour un solide borné. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

acoustique / fissure plane / problème inverse

Inverse scattering of a planar crack in 3D acoustics: closed form solution for a bounded body

Abstract. *We consider the inverse problem of identifying a planar crack in 3D acoustics, using arbitrary transient inputs applied to the boundary of the solid. We show that overdetermined boundary data, input excitation and output, allow the explicit reconstruction of the crack plane and the crack geometry. This explicit solution proves that for bounded solids, overdetermined boundary data suffice to identify planar cracks. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

scattering / planar crack / inverse problem

Abriged English Version

The analysis of the diffraction of acoustic waves by a crack in a solid body in order to reconstruct the crack, is a classical inverse problem. However, classical mathematical studies in the litterature within dynamics are subject to different limitations: unbounded domain; domain with known Green function; source in the interior of the body; source far away from the crack in order to consider plane waves, etc.

Note présentée par Huy Duong BUI.

1287-4620/99/032700971

In all these investigations, a diffracted wave in an unbounded medium is examined to obtain the information on the crack. The applications to bounded bodies are generally done by numerical simulation using the finite-element method or integral equations coupled with a variational formulation. In order to obtain general identifiability results and eliminate these limitations let us consider a bounded domain Ω, subject to Neumann boundary conditions, which is a function of time, not necessarily harmonic. The acoustic problem setting will be perturbed by a small viscosity term (1), which will vanish for the asymptotic solution of the physical problem. It will be assumed that the solution and its velocity vanish for large times (3). This can be achieved by optimal control techniques [2].

We shall suppose that for a given Neumann boundary condition the Dirichlet boundary condition is measured for all times. The problem addressed in the sequel is the reconstruction of a planar crack from the knowledge of the Dirichlet-Neumann boundary data pair. The crack will be considered fixed over time and it will be simultaneously characterised by a free boundary and a jump in the acoustic solution at its passage.

The introduction of an adjoint field in the variational formulation of the direct problem leads to a *Betti Reciprocity* equation (8). In order to obtain this reciprocity, an acoustic equation perturbed by a viscosity term of a changed sign has been considered as the adjoined equation (7). The crack will be identified using different families of incident waves in two step: in a first part, its plane will be defined by its normal and its position, and in a second part the support of the crack is identified. In the case of the support of the crack, the chosen family of incident waves allows, through the Betti reciprocity equation, the construction of the Fourier transform of the jump of the acoustic field along the crack. Thus the support of the crack can be identified.

1. Introduction

L'analyse de la diffraction des ondes acoustiques par une fissure dans un solide, destinée à la reconstruction de cette dernière, est un problème inverse classique. Cependant, les études mathématiques trouvées dans la littérature, en dynamique, sont sujettes à certaines limitations : milieu non borné, pour lequel on connaît la fonction de Green ; source d'excitation à l'intérieur du domaine, source éloignée de la fissure de telle sorte que l'onde incidente puisse être considérée comme une onde plane, de fréquence pure, etc. Dans tous ces travaux, c'est l'onde diffractée dans le milieu non borné qui est analysée pour extraire l'information sur la fissure. Les études sur les solides bornés sont généralement effectuées, en statique comme en dynamique, par simulations numériques, soit par la méthode des éléments finis, soit par la méthode des équations intégrales couplées avec une formulation variationnelle [1].

Pour lever ces diverses restrictions en vue d'établir un résultat d'« identifiabilité » de fissure plane le plus général possible, nous considérons un solide borné $\Omega \subset [-a, a]^3 \subset \mathbb{R}^3$, soumis à des conditions aux limites de Neumann, fonction quelconque du temps, non nécessairement harmonique. Par « identifiabilité », nous entendons ici non seulement l'unicité de la solution du problème inverse de détermination de la fissure, mais encore la reconstruction effective de la fissure, considérée ici comme le support de la discontinuité du champ acoustique convenablement choisi. Nous supposons seulement qu'il existe une fissure $F \subset \Omega$, qu'il s'agit de déterminer par des mesures de frontière. Considérons le problème acoustique direct, légèrement perturbé par un petit terme visqueux ($\varepsilon > 0$), destiné uniquement à la formulation mathématique du problème inverse, qui tendra vers zéro dans la solution asymptotique du problème physique. Les équations du problème s'écrivent :

$$\mathscr{L}_\varepsilon(w) = \partial_t\,\partial_t\,u - \Delta u + \varepsilon\,\partial_t\,u = 0 \tag{1}$$

avec les conditions initiales :

$$u(\boldsymbol{x}, t \leq 0) = 0 \quad \partial_t u(\boldsymbol{x}, t \leq 0) = 0 \tag{2}$$

et les conditions aux limites :

$$\partial_n u\,|_{\partial\Omega} = \phi^m \quad \partial_n u\,|_F = 0 \tag{3}$$

où ϕ^m est une force imposée et l'on supposera qu'elle est telle que la solution u_ε ainsi que la vitesse ∂u_ε décroissent rapidement pour $\boldsymbol{x} \in \Omega$ quand $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} t^2 |u_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)| = 0 \quad \lim_{t \to \infty} t^2 |\partial_t u_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)| = 0 \tag{4}$$

Pour satisfaire à (4), on peut agir sur la condition aux limites, par exemple, après une mise en mouvement initial, on peut amener le milieu au repos par des contrôles sur sa frontière [2].

Supposons maintenant que la réponse u_ε est connue à la frontière $\partial\Omega$ pour tout $t \in [0, \infty[$:

$$\psi^m = u_\varepsilon|_{\partial\Omega} \tag{5}$$

Nous cherchons à résoudre le problème *inverse*, consistant à déterminer la fissure F en utilisant les deux données exactes : ψ^m, ϕ^m.

La fissure est caractérisée par deux propriétés : elle fait écran à l'onde (condition aux limites (3)) et le champ acoustique y est discontinu $[\![u]\!] \neq 0$. En élastostatique, on ajoute une troisième propriété, la non-pénétration ou la discontinuité normale positive. Cette troisième condition n'a pas à être prise en compte dans les problèmes de détection acoustique de fissures existantes dans un solide, qui sont en réalité en grande partie des défauts de soudure plus ou moins plats dont l'épaisseur dépasse très largement l'amplitude assez faible des ondes de pression. Nous considérons donc que le support de la discontinuité dans l'expérience réelle est la fissure elle-même. (Notons que ce n'est pas toujours le cas en élastostatique, car il peut y avoir contact unilatéral sur F).

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au problème d'« identifiabilité » de la discontinuité, plus précisément au calcul explicite du support de la fissure, ce qui résoud en même temps le problème de l'unicité, en laissant de côté les problèmes de stabilité (continuité de la solution par rapport aux données) et de simulation numérique.

2. Champs adjoints et fonctionnelle d'écart à la réciprocité

La présence du terme visqueux dans (1), aussi petit soit-il, est le point clé de la méthode de solution du problème inverse. Cette perturbation régulière de l'équation des ondes scalaires permet de s'affranchir des conditions généralement trop sévères imposées aux champs adjoints, conditions qui limitent jusqu'à présent leur choix pour résoudre effectivement le problème inverse.

Introduisons un champ adjoint w défini dans $\Omega \times [0, \infty[$, borné, de classe C^2. En multipliant (1) avec w et en effectuant quelques intégrations par parties on obtient :

$$\int_0^\infty \int_F ([\![\partial_n u]\!] w - [\![u]\!] \partial_n w) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\Omega \backslash F} u(\partial_t \partial_t w - \Delta w - \varepsilon \partial_t w) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t + \tag{6}$$

$$+ \int_{\Omega \backslash F} [w \partial_t u - u \partial_t w + \varepsilon u w]_0^\infty \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\partial\Omega \backslash F} (w \partial_n u - u \partial_n w) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$

Si l'on choisit w solution de :

$$\mathscr{L}_\varepsilon^*(w) = \partial_t \partial_t w - \Delta w - \varepsilon \partial_t w = 0 \tag{7}$$

en tenant compte des conditions (4) et (2) on obtient :

$$\int_0^\infty \int_F [\![u]\!] \partial_n w \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} (u \partial_n w - w \partial_n u) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \tag{8}$$

Le deuxième terme de l'équation va être dénommé *Réciprocité de Betti.* C'est une forme linéaire de w, dépendant des données, ψ^m, ϕ^m :

$$\mathscr{RB}(w ; \psi^m, \phi^m) = \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} (\psi^m \partial_n w - w \phi^m) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \tag{9}$$

L'équation de réciprocité (8) généralise à la dynamique la méthode de la fonctionnelle d'écart à la réciprocité déjà utilisée en quasi-statique par de nombreux auteurs, Calderon [3], Andrieux et al. [4, 5], Alessandrini et Diaz [6].

3. Détermination du plan de la fissure

Ce problème est résolu par des champs adjoints de type ondes planes habituelles, comme dans l'analyse fréquentielle en considérant les équations des ondes (1) et (7) avec $\varepsilon = 0^+$ au sens des distributions.

Considérons un champ $w_k(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k} + t)$, trace dans Ω d'une onde plane rétrograde de direction de propagation $\boldsymbol{k}$, non nulle pour $t \in [0, T[$ et nul dans Ω pour $t \in [T, \infty]$. L'opérateur intégral agissant sur $[\![u]\!]$ figurant au premier membre de (8) est identiquement nul lorsque $\partial_n w$ est identiquement nul sur $P \times [0, \infty[$, où P désigne le plan de la fissure. Il suffit de tester deux ondes planes indépendantes caractérisées par $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ annulant le second membre $\mathscr{RB}(w_k ; \psi^m, \phi^m) = 0$. La normale $\boldsymbol{n}$ au plan P est alors orthogonale aux deux directions de propagation choisies $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}_1 \times \boldsymbol{k}_2$. Ainsi deux zéros distincts de $\mathscr{RB}(w_k ; \psi^m, \phi^m)$, fonction de $\boldsymbol{k}$, la direction de propagation de l'onde plane, déterminent la *normale* à la fissure. Une fois trouvée la direction $\boldsymbol{n}$, prise comme l'axe Ox_3, la position du plan d'équation $x_3 = c$ est révélée par le zéro de la fonctionnelle $\mathscr{RB}(w_b ; \psi^m, \phi^m)$, avec la fonction adjointe rétrograde w_b dépendant d'un paramètre b, ne croissant pas plus vite que t^2, définie par :

$$w_b(\boldsymbol{x}, t) = \left(x_3 - b + t - \frac{T}{2} \right)^2 \tag{10}$$

L'intégration de $\mathscr{R}\mathscr{B}(w_b\,;\psi^m,\phi^m)$ est convergente, grâce au fait que la surface $\partial\Omega$ est bornée et grâce à la décroissance temporelle de $\partial_t\psi^m$. Au temps $t = T/2$ et sur la fissure $x_3 = c$, on a $\partial_3 w = 2(c-b)$. Le zéro simple de $\mathscr{R}\mathscr{B}(w_b\,;\psi^m,\phi^m)$, fonction du paramètre b, se trouve en $b = c$, et révèle explicitement la position $x_3 = c$ de la fissure.

Ainsi notre résultat pour le solide borné correspond à celui donné par Alves et Ha-Duong dans leur analyse de diffraction lointaine d'ondes acoustiques [7] ou élastiques [8] dans un milieu non borné. Par une approche directe du problème de diffraction, ces auteurs ont identifié le plan P de la fissure, avec une seule onde incidente, comme c'est le cas ici avec une seule expérience, et ont montré que la fissure ne diffracte pas les ondes quand elles « voient » la fissure par la tranche.

L'analyse donnée ici par la fonctionnelle $\mathscr{R}\mathscr{B}$ est différente en ce sens que l'onde incidente étant fixée, c'est l'onde analysante choisie w qui ne « voit » pas la fissure par la tranche, ce qui nous permet de la « détecter » par l'absence d'écart à la réciprocité $\mathscr{R}\mathscr{B} = 0$.

4. Identification de la géométrie de la fissure

Nous prenons Ox_1x_2 suivant le plan P de la fissure. Le champ adjoint considéré, satisfaisant à (7), dépend de trois paramètres réels $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $q \in \mathbb{R}$:

$$w = \exp(\mathrm{i}qt)\exp(-\mathrm{i}(\boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{x}'))\exp((|\boldsymbol{\xi}'|^2 - q^2 - \mathrm{i}\varepsilon q)^{\frac{1}{2}}x_3) \tag{11}$$

où le prime $'$ désigne les points du plan P, i.e. $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2)$. Par $\mathscr{R}\mathscr{B}(\boldsymbol{\xi}', q)$, on va nommer l'écart de réciprocité associé à ce champ adjoint w.

Le saut de la solution sur la fissure va être prolongé par zéro dans tout le plan P et, noté avec :

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{x}', t) = [\![u(\boldsymbol{x}', t)]\!] \tag{12}$$

Introduisons la transformée de Fourier temporelle [8] :

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{x}', q) = \int_0^\infty \mathscr{D}(\boldsymbol{x}', t)\exp(\mathrm{i}qt)\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

et son inverse :

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{x}', t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{i}qt)\,\mathscr{H}(\boldsymbol{x}', q)\,\mathrm{d}q \tag{14}$$

Comme le support spatial de $\mathscr{D}$ est indépendent de t et borné ($\operatorname{supp}\mathscr{D}(\boldsymbol{x}', t) \subseteq F$), les supports spatiaux de $\mathscr{H}(\boldsymbol{x}', q)$ et de $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}', t)$ sont les mêmes. Afin de connaître le support de la discontinuité, il suffit d'étudier la fonction $\mathscr{H}(\boldsymbol{x}', q)$ pour $q > 0$ fixé. Comme $\partial_3 w|_{x_3=0} = (|\boldsymbol{\xi}'|^2 - q^2 - \mathrm{i}\varepsilon q)^{\frac{1}{2}} w$, nous avons l'équation pour déterminer $\mathscr{H}(\boldsymbol{x}', q)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2}\mathscr{H}(\boldsymbol{x}', q)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \mathscr{R}\mathscr{B}(\boldsymbol{\xi}', q)\,(|\boldsymbol{\xi}'|^2 - q^2 - \mathrm{i}\varepsilon q)^{-\frac{1}{2}} \tag{15}$$

Le second membre de l'équation précédente :

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\xi}') := \mathscr{R}\mathscr{B}(\boldsymbol{\xi}', q)\,(|\boldsymbol{\xi}'|^2 - q^2 - \mathrm{i}\varepsilon q)^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

est de classe C^∞ à cause du terme $\varepsilon q > 0$. Prolongeons analytiquement les fonctions de ξ' dans le voisinage des axes réels des complexes $s' = \xi' + i\eta'$, $\eta' \in \mathbb{R}^2$. D'après (15) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{H}(x', q)\exp(-\mathrm{i}s' \cdot x')\,\mathrm{d}x' = \mathscr{R}\mathscr{B}(s', q)\left(|s'|^2 - q^2 - \mathrm{i}\varepsilon q\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{17}$$

On rappelle que le solide était supposé borné $\Omega \subset [-a, a]^3$. Pour $|s'|$ assez grand, on a donc la majoration :

$$|\mathscr{G}(s')| \leq C\exp(a(|s_1| + |s_2|))\exp(a(|s_1|^2 + |s_2|^2)^{\frac{1}{2}}) \leq C\exp(2a(|s_1| + |s_2|)) \tag{18}$$

avec $C > 0$ une constante.

On rappelle qu'une distribution est de type exponentiel $\leq 2a$ si l'inégalité (18) est vérifiée. Donc $\mathscr{G}(s')$ est une distribution de type exponentiel $\leq 2a$ et d'après un théorème de Paley-Wiener ([9], p. 271), $\mathscr{G}(s')$ est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée $\mathscr{H}$, à support compact.

Pour $q > 0$ fixé, un passage à la limite au sens des distributions pour $\varepsilon = 0^+$, donne l'expression de la fonction $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H}(x', q) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{R}\mathscr{B}(\xi', q)\exp(\mathrm{i}x' \cdot \xi')\left(|\xi'|^2 - q^2 - \mathrm{i}0^+\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi' \tag{19}$$

En conclusion, le calcul explicite de cette intégrale révèle le support de $\mathscr{H}$ c'est-à-dire de $\mathscr{D} = [\![u]\!]$ et donc le support de la fissure elle-même.

Références bibliographiques

[1] Ha-Duong T., On boundary integral equations associated to scattering problems of transient waves, ZAMM 6 (1997) 261–264.
[2] Lions J.-L. Contrôlabilité exacte des systèmes distribués, C. R. Acad. Sci. Paris, série II 302 (1986) 471–475.
[3] Calderon A., On an inverse boundary problem, in: Seminar on Numerical Analysis and Application to Continuum Physics, Rio de Janeiro, 1980, pp. 65–73.
[4] Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D., Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité, C. R. Acad. Sci. Paris, série I 324 (1997) 1431–1438.
[5] Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D., Reciprocity principle and crack identification, Inverse Problems, 15 (1999) 59–65.
[6] Alessandrini G., Diaz Valenzuela A., Unique determination of multiple cracks by two measurements, Quad. Mat. Univ. Trieste (1994).
[7] Alves C.J.S., Ha-Duong T., Inverse Scattering for elastic plane waves, Inverse Problems 15 (1999) 91–97.
[8] Alves C.J.S., Ha-Duong T., On inverse scattering by screens, Inverse Problems 13 (1997) 1161–1176.
[9] Schwartz L., Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1978.