



# Critère de fatigue polycyclique pour des matériaux anisotropes : application aux monocristaux

Florian Cano, Andrei Constantinescu, Habibou Maitournam

*Laboratoire de mécanique des solides (CNRS UMR 7649), École polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

Reçu le 3 novembre 2003 ; accepté le 17 novembre 2003

Présenté par Huy Duong Bui

---

## Résumé

Les critères de fatigue polycycliques fondés sur un passage macro–mésos, initiés par Dang Van, ont essentiellement été utilisés pour des matériaux polycristallins. Dans les critères existants l'isotropie aux échelles macroscopique et mésoscopique joue un rôle crucial. L'objectif de ce travail est de revoir l'approche macro–mésos en fatigue en tenant compte de l'anisotropie du matériau et en s'appuyant sur des résultats obtenus par Bui. Les applications possibles sont les aciers inclusionnaires ou encore des structures monocristallines comme les aubes de turbine en titane. *Pour citer cet article : F. Cano et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A high cycle fatigue criterion for anisotropic materials: application to single crystals.** The high-cycle fatigue criteria based on a macroscopic–mesoscopic scale interpretation, initiated by Dang Van, were used essentially for polycrystalline materials. In the existing criteria the material isotropy at both mesoscopic and macroscopic scales plays a key role. The purpose of this paper is to revisit the macroscopic to mesoscopic fatigue approach taking into account the material anisotropy and some results obtained by Bui. The possible applications are some anisotropic steels or monocrystalline structures such as titanium turbine blades. *To cite this article: F. Cano et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Solides et structures ; Fatigue polycyclique ; Anisotropie ; Monocristal

*Keywords :* Solids and structures; High cycle fatigue; Anisotropy; Monocrystal

---

## Abridged English version

The high-cycle fatigue criteria based on a macroscopic–mesoscopic scale interpretation, initiated by Dang Van [1], have been used essentially for polycrystalline materials. The main hypothesis is that there is a badly oriented grain which will initiate the fatigue phenomena. The quantities intervening in the criteria are maximised [1] or considered in the mean value [3] of all possible plane orientations. In the existing criteria, the material isotropy at both mesoscopic and macroscopic scales plays a key role.

---

*Adresses e-mail :* [andrei@lms.polytechnique.fr](mailto:andrei@lms.polytechnique.fr) (A. Constantinescu), [habibou@lms.polytechnique.fr](mailto:habibou@lms.polytechnique.fr) (H. Maitournam).

The purpose of this Note is to revisit the macroscopic to mesoscopic fatigue approach, taking into account the material anisotropy. The possible applications are some anisotropic steels or monocrystalline structures such as titanium turbine blades.

*Macro–meso passage in anisotropic elasticity.* Different assumptions can be used to derive the relations between mesoscopic and macroscopic strains and stresses,  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  and  $\boldsymbol{E}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$ , respectively, under the hypothesis of macroscopic elasticity which is valid for high cycle fatigue. The *Sachs model* ( $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}$ ) is valid for slender structures with uniaxial macroscopic stresses, but not for polycrystals since it neglects the misfit stresses between crystals, where as the *Lin–Taylor model* ( $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{E}$ ) is valid for many cases. In the polycrystal, assumptions that plasticity at the mesoscopic level is represented on gliding planes and is not extended to the complete representative elementary volume leads to  $\boldsymbol{E}^P = 0$  and then to (3) where  $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} : \boldsymbol{I})^{-1}$  is assumed to be known (thanks to  $\boldsymbol{I}$ ). The Bui [4] anisotropic self-consistent model, generalising the Kröner model for crystals with strong crystalline anisotropy, gives another estimation of the mesoscopic stresses which satisfies the Hill–Mandel [5] macro-homogeneity condition. The tensor  $\boldsymbol{A}$ , the mesoscopic stresses, and the mesoscopic normal and shear stresses on a given gliding plane  $s$  are then given respectively by Eqs. (4), (5), (7) and (8).

*Fatigue criterion for anisotropic amorphous materials.* In this section we consider macroscopically amorphous and anisotropic materials. The condition of an unlimited lifetime implies an elastic shakedown for all grains at the mesoscopic level. The plastic strains  $\gamma^s$  are constant and the stress path has the form (9), where the field  $\boldsymbol{\rho}$  is time independent. The fact that the material is amorphous and anisotropic and that plastic deformations are small imply after a homogenisation procedure that the plasticity criterion has the form of an ellipsoid described by (10). The orientation of the ellipsoid is described by  $\boldsymbol{B}$  and its dimensions by  $k(\alpha)$ . The classical hypothesis in high cycle fatigue is that the fatigue limit corresponds to the mesoscopic elastic shakedown limit [2]. As a consequence we can conclude that  $-\boldsymbol{\rho}$  is at center of the smallest ellipsoid of orientation  $\boldsymbol{B}$  and that the fatigue limit is determined by its dimension (see Fig. 1).

A straightforward generalisation for the Dang Van fatigue criterion becomes: *The lifetime of the material is unbounded (infinite) if and only if relation (11) holds, where  $a$  and  $b$  are material constants.*

The generalisation of the Papadopoulos fatigue criterion is then: *The lifetime of the material is unbounded (infinite) if and only if relation (12) holds, where  $a$  and  $b$  are material constants and  $k^*$  is the dimension of the smallest ellipsoid including the stress path (see relation (10) and Fig. 1) and  $p_{\max}$  the maximum value of the mesoscopic hydrostatic pressure.*

*Fatigue criteria for monocrystalline materials.* In the case of monocrystalline materials, we shall refer to the plasticity criterion of every gliding plane and the mesoscopic normal and shear stress on the gliding plane of orientation  $\boldsymbol{n}$ . The Dang Van and Papadopoulos criteria overlap in this case and are expressed as: *The lifetime of the material is unbounded (infinite) if and only if relation (16) holds, where  $a^s$  and  $b^s$  are material constants defined for each gliding plane.*

*Application to certain classes of material symmetry.* One can remark that the preceding reasoning, in the case of Lin–Taylor model, is simplified in the case of isotropic materials. This is due to the fact that relation  $\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\alpha}^s = 2\mu\boldsymbol{\alpha}^s$  always holds in isotropic elasticity. The meaning of this relation is actually that the gliding system  $\boldsymbol{\alpha}^s$  is an eigenvector of the elasticity tensor  $\boldsymbol{C}$  (for a detailed definition of eigenvalues and eigenvectors see [6,7]). A close inspection of some classical crystalline symmetries shows that this property is not always verified. The computations in the appendix show that for the hexagonal symmetry, the case of titanium monocrystals, all gliding directions are eigenvectors. However, in the case of a crystal with cubic symmetry there is a gliding direction which is not an eigenvector.

*Conclusion.* This paper presented an extension to anisotropic materials of high cycle fatigue criteria based on a macro–meso passage. Their implementation in applications is shown to be of a similar complexity with the isotropic criteria.

## 1. Introduction

L'approche macro–mésos initiée en fatigue à grand nombre de cycles par Dang Van [1], a été principalement utilisée pour les matériaux polycristallins. Elle se fonde d'une part sur le concept d'adaptation [2], d'autre part sur le fait que, comme le volume élémentaire représentatif contient des cristaux de toutes formes et d'orientations aléatoires, il existe toujours un grain défavorablement orienté dans lequel vont s'amorcer les phénomènes de fatigue. Les grandeurs intervenant dans le critère de fatigue (amplitudes de cisaillement par exemple) sont alors déterminées soit en cherchant leurs valeurs maximales sur toutes les directions possibles (Dang Van), soit en moyennant sur toutes directions (Papadopoulos [3]). L'isotropie aux deux échelles joue donc un rôle crucial. Lorsque celle-ci n'est plus valable, les méthodes de calcul des grandeurs précédentes doivent alors être revues. C'est le cas pour certains aciers inclusionnaires dont les inclusions présentent des directions privilégiées dues notamment au laminage. C'est aussi le cas, lorsqu'on s'intéresse à des structures monocristallines, forcément anisotropes, comme les aubes de turbines.

Dans cette Note, nous nous proposons d'adapter cette approche macro–mésos au cas anisotrope. Le passage entre grandeurs macroscopiques et mésoscopiques est effectué en utilisant les modèles simples et économiques existants : modèle de Sachs, modèle de Lin–Taylor et modèle auto-cohérent de Bui [4]. À partir de la forme générale proposée par ce dernier, une discussion sur la validité de ces modèles est faite. Une fois, l'estimation des contraintes résiduelles mésoscopiques effectuée dans le cas anisotrope, nous proposons des adaptations des critères de fatigue polycyclique de Dang Van et de Papadopoulos, d'abord dans le cas anisotrope et ensuite dans celui plus spécifique du monocristal.

## 2. Passage macro–mésos en élasticité anisotrope

On se place dans le cadre de la fatigue à grand nombre de cycle. On suppose donc que le matériau reste élastique au niveau macroscopique. Ainsi, sa loi de comportement représentant le comportement homogénéisé du Volume Élémentaire Représentatif (VER), s'écrit :

$$\Sigma = C : E^e \iff E^e = L : \Sigma \quad \text{avec } L = C^{-1} \quad (1)$$

$C$  et  $L$  sont les tenseurs d'ordre 4, respectivement de rigidité et de souplesse macroscopiques. Le régime étant purement élastique, on a  $E^p = 0$  et le tenseur des déformations est donné par  $E = E^e$ . Au niveau mésoscopique on a de manière similaire :

$$\sigma = c : \varepsilon^e \iff \varepsilon^e = l : \sigma \quad \text{avec } l = c^{-1} \quad (2)$$

$c$  et  $l$  sont les tenseurs d'ordre 4, respectivement de rigidité et de souplesse mésoscopiques. À cette échelle, les phénomènes de plasticité sont pris en compte et la décomposition additive du tenseur de déformation est adoptée :  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ .

Le passage des grandeurs entre les deux échelles, mésoscopique et macroscopique, peut être envisagé sous différentes hypothèses simples pour évaluer les grandeurs mésoscopiques sans passer par des calculs coûteux par la méthode des éléments finis. Ce sont les trois modèles qui suivent.

*Modèle de Sachs :*  $\sigma = \Sigma$ . Ce type de modèle s'applique plutôt aux structures élancées (poutres, etc.) soumises à des contraintes macroscopiques uniaxiales ; dans le cas des polycristaux, il ne prend pas en compte les « contraintes d'incompatibilité » (misfit stress) entre les cristaux.

*Modèle de Lin–Taylor :*  $\varepsilon = E$ . Il est pertinent dans des nombreux cas. On voit que pour les métaux avec une texture allongée selon une direction, le fait d'imposer la déformation macroscopique dans cette direction entraîne

l'allongement de toutes les fibres dans cette direction. Dans le polycristal, en supposant une plasticité très peu étendue à l'intérieur du VER, on a  $\mathbf{E}^p = 0$ , c'est-à-dire une réponse quasi-élastique au niveau macroscopique. On obtient alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{A} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3)$$

où l'on a posé  $\mathbf{A} = (\mathbf{C} : \mathbf{I})^{-1}$ .  $\mathbf{A}$  apparaît donc comme un tenseur de localisation. On va supposer dans la suite que, pour ce modèle  $\mathbf{A}$  est connu par la donnée des souplesses  $\mathbf{I}$ . Dans le cas général sans les hypothèses restrictives comme celle de Lin–Taylor,  $\mathbf{A}$  n'est accessible que par les « éléments finis ».

Modèle « auto-cohérent anisotrope » de Bui [4] qui généralise au cas des cristaux à forte anisotropie élastique cristalline, celui de Kröner obtenu en isotropie élastique cristalline. Il donne une autre estimation simple de  $\mathbf{A}$ . Mais ici, la déformation plastique macroscopique n'est pas nécessairement nulle. En utilisant un résultat de Hershey–Kröner sur une inclusion sphérique élastique anisotrope dans une matrice infinie de module de rigidité élastique isotrope  $\mathbf{C}^0$  ou de souplesse  $\mathbf{L}^0$  de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , Bui a obtenu une autre estimation de la contrainte mésoscopique pour un polycristal satisfaisant à la condition de macro-homogénéité selon Hill–Mandel. Le tenseur  $\mathbf{A}$  est donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{C} : [\mathbf{I}d + \mathbf{R} : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0)]^{-1} : \mathbf{L}^0 \\ R_{ijkl} = ((3\lambda + 8\mu)/(15\lambda + 30\mu))I_{ijkl} - ((\lambda + \mu)/(15\lambda + 30\mu))\delta_{ij}\delta_{kl} \end{cases} \quad (4)$$

Le tenseur des contraintes mésoscopiques est alors donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma} - 2\mu(1 - \beta)\mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{E}^p) \quad (5)$$

avec  $\beta = (6\lambda + 16\mu)/(15\lambda + 30\mu)$ . Le deuxième terme de (6) représente la relaxation des contraintes d'incompatibilités élastique et plastique qui n'existe pas dans le modèle de Sachs mais est égale à  $-\mathbf{A} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p$  dans le second modèle.

Les trois résultats précédents peuvent être exprimés sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{A} : \mathbf{C}^* : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{E}^p) \quad (6)$$

avec, pour Sachs :  $\mathbf{A} = \mathbf{I}d$  et  $\mathbf{C}^* = 0$ , pour Lin–Taylor :  $\mathbf{A} = (\mathbf{C}\mathbf{I})^{-1}$ ,  $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$  et  $\mathbf{E}^p = 0$ , et pour Bui :  $\mathbf{A}$  donné par (4) et  $\mathbf{C}^* = 2\mu(1 - \beta)\mathbf{I}d$  ou  $= (1 - \beta)\mathbf{C}^0$ . Dans la plupart des métaux, le coefficient  $\beta$  est proche de 1/2. Le modèle auto-cohérent présente donc une relaxation des contraintes d'incompatibilité élastoplastique moins importante que celle du modèle de Lin–Taylor pour lequel les incompatibilités élastique et plastique s'équilibrent. De plus, ce modèle (5) est cohérent avec les résultats d'homogénéisation du polycristal macro-homogène démontré par Mandel [5] ( $\mathbf{E}^p = \langle \mathbf{I} \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle$ ) et par Bui ( $\mathbf{E}^e = \langle \mathbf{I} \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle$ ).

Une fois établi ce passage on peut, pour  $\mathbf{E}^p = 0$  et en écrivant  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{2} \sum_s \gamma^s (\mathbf{m}^s \otimes \mathbf{n}^s + \mathbf{n}^s \otimes \mathbf{m}^s) = \sum_s \gamma^s \boldsymbol{\alpha}^s$  déduire la contrainte normale mésoscopique et le vecteur cission mésoscopique sur le plan de glissement  $s$  :

$$\sigma_n^s = (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}^s \otimes \mathbf{n}^s) = \left( \mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma} - \sum_{s'} \gamma^{s'} \mathbf{A} : \mathbf{C}^* : \mathbf{m}^{s'} \otimes \mathbf{n}^{s'} \right) : (\mathbf{n}^s \otimes \mathbf{n}^s) \quad (7)$$

$$\tau^s = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m}^s \otimes \mathbf{n}^s = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha}^s = \left( \mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma} - \sum_{s'} \gamma^{s'} \mathbf{A} : \mathbf{C}^* : \mathbf{m}^{s'} \otimes \mathbf{n}^{s'} \right) : (\mathbf{m}^s \otimes \mathbf{n}^s) \quad (8)$$

### 3. Critère pour matériaux anisotropes amorphes

On considère dans cette section, des matériaux macroscopiquement amorphes et anisotropes. Le fait qu'on soit en endurance illimitée, requiert une *adaptation* au niveau mésoscopique. Par conséquent, les quantités  $\gamma^s$  sont constantes pour tous les systèmes de glissement et le cycle des contraintes mésoscopiques est décrit par :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma}(t) + \boldsymbol{\rho} \quad \forall t > t_a \tag{9}$$

où le champ des contraintes résiduelles  $\boldsymbol{\rho}$  est, après adaptation à l’instant  $t_a$ , indépendant du temps.

D’après les théorèmes d’adaptation [8], il existe alors des variables d’écrouissage fixes telles que le trajet élastique de chargement soit contenu dans un domaine élastique construit à partir de ces variables.

Si dans les sections précédentes, nous avons considéré une plasticité développée selon des plans de glissement, l’hypothèse de matériau amorphe faite dans cette section nous amène à supposer qu’à l’échelle mésoscopique le matériaux obéit à un critère de plasticité anisotrope. Cette hypothèse est une conséquence de la faible plasticité mésoscopique (développée en fatigue à grand nombre de cycles) et de l’homogénéisation qui est faite. Ainsi, le critère peut s’écrire sous la forme :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, h\boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha) = \|\boldsymbol{\sigma} - h\boldsymbol{\varepsilon}^p\|_B - k(\alpha) = [(\boldsymbol{\sigma} - h\boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{B} : (\boldsymbol{\sigma} - h\boldsymbol{\varepsilon}^p)]^{1/2} - k(\alpha) < 0 \tag{10}$$

avec  $\mathbf{B}$  un tenseur symétrique défini positif,  $h$  le module d’écrouissage,  $k(\alpha)$  une fonction positive bornée de la déformation plastique cumulée  $\alpha$ . Ainsi le domaine élastique devient un ellipsoïde généralisé dans l’espace des contraintes. L’orientation de cet ellipsoïde est complètement définie par  $\mathbf{B}$ .

Par conséquent, s’il y a adaptation, le trajet défini par  $\mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma}(t)$  doit être contenu dans l’ellipsoïde de plasticité translaté de  $-\boldsymbol{\rho}$ . Une hypothèse classique en fatigue polycyclique, nous assure que la limite de fatigue correspond à la limite d’adaptation mesoscopique. Donc,  $-\boldsymbol{\rho}$  apparaît comme le centre du plus petit ellipsoïde généralisé, orienté par  $\mathbf{B}$ , contenant le trajet de chargement élastique (voir Fig. 1).

Le fait que le plus petit ellipsoïde existe et est unique dans ce cas peut être démontré en faisant une transformation de coordonnées dans l’espace des contraintes ramenant l’ellipsoïde à une sphère. Le plus petit ellipsoïde étant défini à partir de la plus petite hypersphère.

À partir de ces définitions on peut tirer plusieurs généralisations des critères classiques d’endurance illimitée. Par exemple, le critère de *Dang Van* [1] devient :

*La durée de vie du matériau est infinie si et seulement si :*

$$\max_s \max_t ((\boldsymbol{\alpha}^s : \mathbf{B} : \boldsymbol{\alpha}^s)^{1/2} \tau^s(t) + a\sigma_n^s(t)) < b \quad (\text{avec } a \text{ et } b \text{ des constantes du matériau}) \tag{11}$$

Le paramètre  $(\boldsymbol{\alpha}^s : \mathbf{B} : \boldsymbol{\alpha}^s)^{1/2}$  est le rayon au sens de la norme  $\|\cdot\|_B$  sur le plan de glissement ;  $\tau^s(t)$  et  $\sigma_n^s(t)$  sont calculés à partir des équations (8) et (7) car la détermination du centre du plus petit ellipsoïde généralisé  $-\boldsymbol{\rho}$  donne accès à  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  par (9).

D’une manière similaire le critère initial de Papadopoulos devient :

*La durée de vie du matériau est infinie si et seulement si :*

$$k^* + a p_{\max} < b \quad (\text{avec } a \text{ et } b \text{ des constantes du matériau}) \tag{12}$$

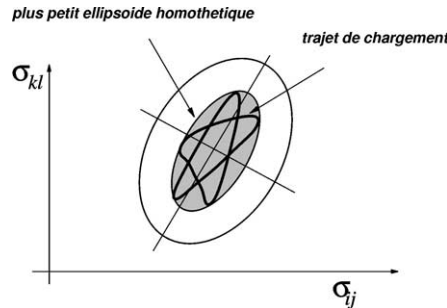


Fig. 1. Schéma du trajet de chargement inscrit dans la plus petite ellipse homothétique donnée par le tenseur  $\mathbf{B}$ .

Fig. 1. Stress path included in the smallest ellipsoid given by tensor  $\mathbf{B}$ .

$k^*$  est la dimension du plus petit ellipsoïde au sens de la norme du critère de plasticité et  $p_{\max}$  est le maximum temporel de la pression hydrostatique mésoscopique. Plus précisément  $k^* = \max_t \|\sigma(t) - C^*\|_B$ , avec  $C^*$  le centre du plus petit ellipsoïde homothétique donné par  $B$ .

On remarque que dans le cas du critère initial de Papadopoulos seule l'anisotropie du critère de plasticité entre en jeu, les différents plans de glissement ne sont plus pris en compte dans ce cas, exactement comme dans le cas isotrope.

#### 4. Critère pour des monocristaux

On se place maintenant dans le cas d'un monocristal anisotrope. S'il possède la même orientation cristalline dans toute la structure, le tenseur  $A$  se réduit à l'identité et le modèle de Sachs se confond avec celui de Lin–Taylor. Si les orientations cristallines sont variables,  $A$  est obtenu par la résolution d'un problème élastoplastique classique. On suppose de plus que les systèmes de glissement sont connus et qu'un seul système de glissement  $s$  est actif. La contrainte normale et la cission sur le système actif sont données par :

$$\sigma_n^s = (A : \Sigma - \gamma^s A : C^* : m^s \otimes n^s) : (n^s \otimes n^s) \quad (13)$$

$$\tau^s = (A : \Sigma - \gamma^s A : C^* : m^s \otimes n^s) : (m^s \otimes n^s) \quad (14)$$

Les théorèmes d'adaptation s'appliquent cette fois-ci directement sur la grandeur  $\tau^s$ . En raisonnant comme auparavant, ces théorèmes nous permettent de calculer  $\gamma^s$  à partir du centre du trajet de chargement élastique, plus exactement il est donné par le centre du segment décrit par :  $(A : \Sigma) : (m^s \otimes n^s)$ .

Dans ce cas la relation entre contrainte mésoscopique et macroscopique devient :

$$\sigma = A : \Sigma - \gamma^s A : C^* : m^s \otimes n^s \quad (15)$$

Le critère de plasticité associé au système de glissement peut être supposé de la forme suivante :  $f_s(\tau^s, b^s, \tau_y^s) = |\tau^s - b^s| - \tau_y^s = 0$ ,  $b^s = c^s \gamma^s$  module d'écrouissage cinématique,  $\tau_y^s = g^s(\gamma^s)$  seuil d'élasticité en cisaillement,  $c^s$  est une constante positive et  $g^s$  une fonction positive bornée.

En ce qui concerne la reformulation des critères, on remarque qu'ils gardent leur forme, mais que les constantes vont dépendre du système de glissement. Ainsi, le critère de Dang Van devient :

*La durée de vie du matériau est infinie si et seulement si pour tout  $s$  :*

$$\max_t (\tau^s(t) + a^s \sigma_n^s(t)) < b^s \quad (\text{avec } a^s \text{ et } b^s \text{ des constantes du matériau}) \quad (16)$$

Le critère de Papadopoulos est confondu avec celui de Dang Van dans ce cas.

#### 5. Applications à certaines symétries matérielles

Les formulations classiques de critères de fatigue présentées précédemment sont simplifiées pour des matériaux isotropes. Mis à part l'hypothèse du modèle Lin–Taylor et  $A = I$  qu'on peut également supposer en élasticité anisotrope, on utilise la relation :  $C : \alpha^s = 2\mu\alpha^s$ . Cette relation est la conséquence directe du fait que la plasticité est déviatorique et du fait que les vecteurs propres du tenseur d'élasticité isotrope sont portés par les parties déviatorique et sphérique. Ce qui revient à dire que les directions de glissement  $\alpha^s$  sont des vecteurs propres du tenseur d'élasticité  $C$  (pour une définition de ces grandeurs voir [7,6]).

Dans le cas d'un monocristal de symétrie matérielle générale, les directions de glissement sont portées par les plans atomiques les plus chargées. Il convient donc de vérifier si ces directions sont ou non directions propres du tenseur d'élasticité du monocristal.

Les calculs présentés dans l'annexe montrent que cette propriété n'est pas vérifiée dans toutes les cas. Pour la structure hexagonale compacte, cas du monocristal de titane, toutes les directions de glissement sont des vecteurs propres. Tandis que pour une structure cubique centrée il existe une direction de glissement qui n'est pas vecteur propre.

Si on se place sous ces deux hypothèses, i.e. tenseur de localisation identité et direction de glissement  $\alpha^s$  direction propre de  $C$ , le passage macro-méso se simplifie et les formules de la contrainte normale et de la cission en considérant un seul système de glissement actif (7) et (8) s'écrivent sous la forme :

$$\sigma_n^s = \Sigma : (n^s \otimes n^s), \quad \tau^s = \Sigma : \alpha^s - 2\mu^s \gamma^s \quad (17)$$

## 6. Conclusion

Une extension naturelle des critères de fatigue à grand nombre de cycles fondés sur une approche macro-méso, au cas des matériaux anisotropes a été présentée. En exploitant les relations de passage entre les échelles macroscopique et mésoscopique du point de vue de l'anisotropie, on obtient de nouvelles formes de critères similaires aux formes existantes. De ce fait, leurs mises en œuvre utilisent les mêmes méthodes et sont donc de difficultés comparables. Leurs utilités sera prouvées dans des applications telles que le fretting des aubes en monocristal de titane, ou dans la fatigue des aciers inclusionnaires.

## Annexe A. Systèmes de glissement et valeurs propres du tenseur d'élasticité

Dans cette section on discute brièvement de l'existence des directions  $\alpha^s$  données par un système de glissement tel que :  $\beta^s = C : \alpha^s = \mu^s \alpha^s$  autrement dit l'existence des vecteurs propres pour le tenseur d'élasticité correspondant à la partie symétrique du produit :  $m^s \otimes n^s$  qui caractérise le système de glissement.

On étudie deux cas : une structure cubique centrée et une structure hexagonale compacte.

*Structure cristalline cubique centrée.* On se place dans la base  $e_k$  avec ( $k = 1, 3$ ) associée à la structure cristallographique cubique, c'est-à-dire que les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  sont parallèles aux arêtes de la maille cristalline. Alors le tenseur d'orientation  $\alpha^s = \frac{-1}{\sqrt{6}} e_1 \otimes e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} e_3 \otimes e_3 + \frac{1}{\sqrt{6}} (e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) + \frac{1}{\sqrt{6}} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$  n'est pas, pour au moins un système de glissement, tenseur propre de la rigidité  $C$ .

*Structure cristalline hexagonale compacte.* On se place dans la base  $e_k$  avec ( $k = 1, 3$ ) de telle façon que  $e_3$  soit colinéaire avec l'axe de symétrie C6 de la maille hexagonale. Pour un tel cristal, il n'existe qu'un seul plan de glissement possible et 3 directions de glissement. Plaçons-nous dans ce plan de glissement et introduisons le paramètre  $\theta^s$ , valeur angulaire entre la direction de glissement  $m^s$  et le vecteur de base  $e_1$ . Etant donné que les directions  $m^s$  sont données par les directions de haute densité atomique, les valeurs permises du paramètre angulaire de glissement sont donc au nombre de trois :  $\theta^1 = 0$ ,  $\theta^2 = \frac{\pi}{3}$  et enfin  $\theta^3 = \frac{2\pi}{3}$ . Définissons maintenant les différents vecteurs nécessaires à la détermination du tenseur d'orientation :  $n^s = e_3$  et  $m^s = \cos \theta^s e_1 + \sin \theta^s e_2$ . D'où  $m^s \otimes n^s = \cos \theta^s e_1 \otimes e_3 + \sin \theta^s e_2 \otimes e_3$ . Le produit doublement contracté  $C : \alpha^s$  montre  $\alpha^s$  est bien tenseur propre de la rigidité  $C$  quel que soit le système de glissement « s » envisagé, avec comme valeur propre :  $\mu^s = \mu = 2C_{44}$ , la valeur propre  $\mu$  étant une constante indépendante des systèmes de glissement.

## Références

- [1] K. Dang Van, Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach, in: K. Dang Van, I.V. Papadopoulos (Eds.), High-Cycle Metal Fatigue, from Theory to Applications, in: CISM Courses and Lectures, vol. 392, Springer-Verlag, 1999, pp. 57–88.
- [2] A. Constantinescu, K. Dang Van, M.H. Maitournam, A unified analysis for low and high cycle fatigue based on shakedown concepts, Fatigue Fract. Engrg. Mater. Struct. 26 (2003) 561–568.
- [3] I.V. Papadopoulos, Exploring the highcycle fatigue behaviour of metals from the mesoscopic scale, J. Mech. Behavior Mater. 6 (2) (1996) 93–118.
- [4] H.D. Bui, Étude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'érouissage et relations de comportement élasto-plastique des métaux cubiques, Thèse de Doctorat ès-sciences physiques, Université de Paris VI, N° A.O. 2883, 1969.
- [5] J. Mandel, Contribution théorique à l'étude de l'érouissage et des lois de l'écoulement plastique, in: Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech. Munich, Springer-Verlag, 1966, p. 502.
- [6] S.C. Cowin, M. Mehradabi, Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, Quart. J. Mech. Appl. Math. 43 (1) (1990).
- [7] S.C. Cowin, M. Mehradabi, Anisotropic symmetries of linear elasticity, Appl. Mech. Rev. 48 (5) (1996).
- [8] Q.S. Nguyen, On shakedown analysis in hardening plasticity, J. Mech. Phys. Solids 51 (2003) 101–125.