O TEOREMA DE UNICITATE PENTRU UN CORP ELASTIC CONTININD O CAVITATE CU O LINIE SINGULARA

ANDREI CONSTANTINESCU
Scoala Generală Lenauheim

§ 1. INTRODUCERE

In această lucrare voi prezenta o teoremă de unicitate de tip KIRCHHOFF în elastostatica lineară pentru un corp conținînd o cavitate cu o linie singulară pe frontieră .

Vom presupune corpul de dimensiuni finite. Rezultatul astfel obținut poate fi extins pentru un corp nemărginit cu tracțiuni nule sau neneul date la mari distanțe. Cazurile analizate de înscriu în problemele singulare studiate de CHEREPANOV ([1], cap. III, § 1, §2), care sînt caracteristice pentru corpurile cu fisuri .

Teorema de unicitate a fost obținută extinzînd teorema despre lucrul mecanic și energie datărată lui LAMÉ, la corpul conținînd o linie singulară și impunînd condiții suficient de restrictive comportamentului cîmpurilor în vecinătatea liniei singulare. Astfel notînd cu ρ distanța normală la linia singulară, presupunem că deplasările sînt $O_L(\rho^{1/2})$ în timp ce deformația și tensiunie sînt $O_L(\rho^{-\frac{1}{2}})$ cînd $\rho \to 0$. Astfel de ipoteze sînt sugerate de rezultatele lui CHEREPANOV și de forma particulară a soluțiilor problemelor legate de fisuri date de MUSHELISVILI ([3], cap.8) și de SNEDDON și LOWENGRUB ([4], cap.3§3).

§ 2.CORPUL

Fie $\mathcal{B}$, corpul elastic omogen mărginit pe care îl identificăm cu mulțimea deschisă și mărginită B, pe care o ocupă într-o configurație de referință fixată. Frontiera corpului $\partial B = S_e \cup S_i$ este reuniunea a două suprafețe . S_e este frontiera exterioară a lui B, o suprafață regulată, iar S_i este frontiera unei cavități interioare. S_i este formată din două suprafețe regulate dě se intersectează după linia singulară L, o curbă plană [1] închisă de două ori continuu diferențiabilă.

---

1) Presupunerea curbei plane nu restrînge generalitatea, simplifică doar calculele.

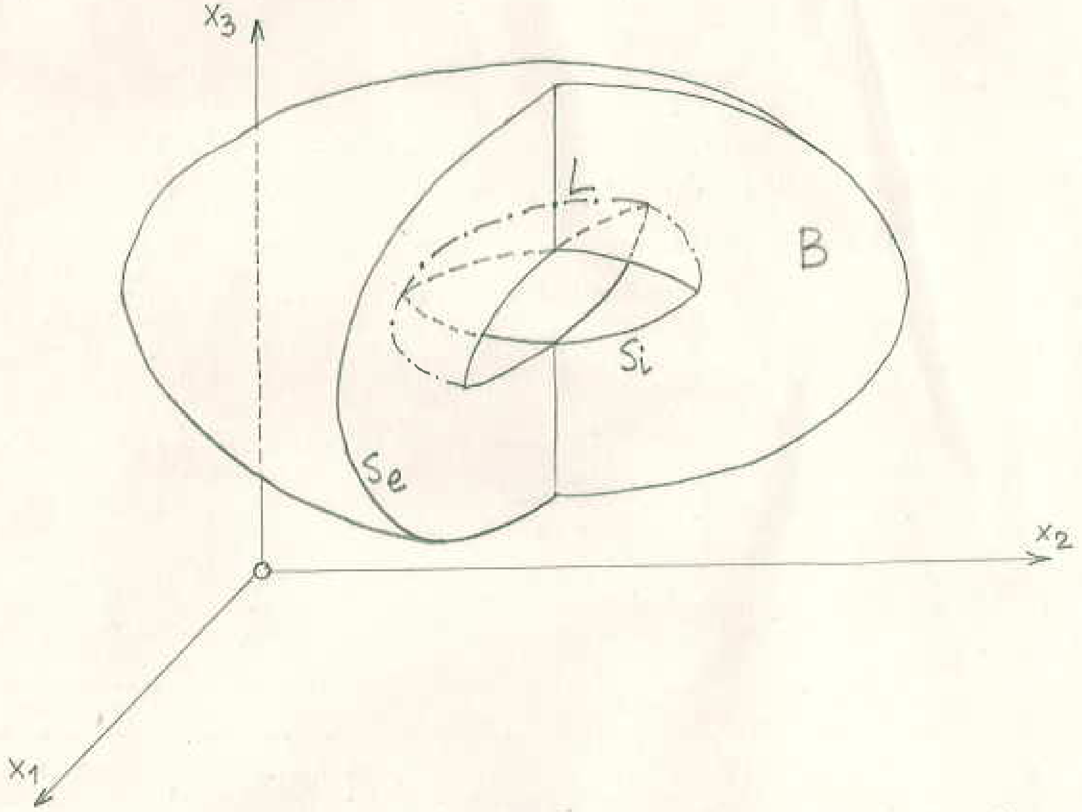

Fig.1. : corpul cu o cavitate interioară

$\vec{b}$ şi $\vec{f}$, $\vec{g}$ vor desemna cîmpurile vectoriale date ale forţelor masice ce acţionează asupra corpului şi forţele de suprafaţă ce acţionează pe S_e respectiv S_i . Cu $\vec{u}$, $E(\vec{u})$, $T(\vec{u})$ notăm cîmpul vectorial al deplasărilor, şi cîmpurile tensoriale ale deformaţiei şi tensiunii. Von presupune că :

$$(1) \quad E(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\vec{u} + \operatorname{grad}^T\vec{u}) \ , \ T(\vec{u}) = C[E(\vec{u})] \ .$$

C - reprezintă tensorul elasticităţii, presupus constant, simetric şi pozitiv definit.

§ 3. COMPORTAMENTUL CÎMPURILOR IN VECINATATEA LINIEI SINGULARE

In această lucrare vom folosi un sistem de coordonate cartezian, rectangular $Ox_1x_2x_3$, ales astfel încît planul liniei singulare L să fie paralel cu Ox_1x_2. Fie $\ell : [0, S_0] \to \mathbb{R}^3$ o parametrizare a lui L după lungimea arcului, iar $(\ell_1(s), \ell_2(s), \ell_3)$ fie coordonatele unui punct curent. Constanţa lui ℓ_3 este implicată de paralelismul lui L cu Ox_1x_2.

Vom introduce în vecinătatea liniei singulare un sistem de coordonate curbilinii prin transformarea :

$$x_1 = \ell_1(s) - \ell_2(s)\rho\cos\varphi \qquad x_2 = \ell_2(s) + \ell_1(s)\rho\cos\varphi \qquad x_3 = \ell_3 + \rho\sin\varphi$$

$$(\rho, \varphi, s) \in [0, R_m) \times [0, 2\pi) \times [0, S_0] \quad ,$$

$$(6)\quad 2U_B = \int_{B\setminus T(p)} \vec{b}\cdot\vec{u}\, dv + \int_{S_e} \vec{f}\cdot\vec{u}\, da + \int_{T_i(p)} \vec{u}\cdot \mathbb{T}\vec{n}\, da + \int_{B\cap T(p)} \mathbb{T}\cdot \mathbb{E}\, dv$$

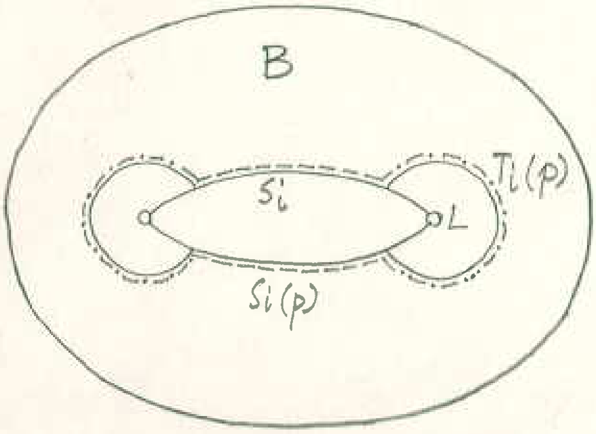

Fig.2. O secţiune plană prin corp.

Trecînd la limită cu $p\to 0$, obţinem:

$$(7)\quad \int_{B\setminus T(p)} \vec{b}\cdot\vec{u}\, dv \longrightarrow \int_B \vec{b}\cdot\vec{u}\, dv \quad , \int_{S_i(p)} \vec{g}\cdot\vec{u}\, da \to \int_{S_i\setminus L} \vec{g}\cdot\vec{u}\, da$$

Din comportamentul lui $\vec{u}$ deducem uşor că:

$$(8)\quad \int_{T_i(p)} \vec{u}\cdot\mathbb{T}\vec{n}\, da \to 0 \quad , \int_{B\cap T(p)} \mathbb{T}\cdot\mathbb{E}\, dv \to 0 \quad \text{cînd} \quad p\to 0 .$$

Întra-devăr $\vec{u}$ este $O_L(\rho^{1/2})$ cînd $\rho\to 0$, deci $\mathbb{E}$ şi $\mathbb{T}$ sînt $O_L(\rho^{-\frac{1}{2}})$ cînd $\rho\to 0$. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$, există $p_\varepsilon\in(0,R_m)$ astfel încît: $|u_i(\rho,\varphi,s)\rho^{-\frac{1}{2}}|\le u_i^*(s)+\varepsilon$

$$|E_{ij}(\rho,\varphi,s)\rho^{\frac{1}{2}}|\le E_{ij}^*(s)+\varepsilon \qquad |T_{ij}(\rho,\varphi,s)\rho^{\frac{1}{2}}|\le T_{ij}^*(s)+\varepsilon$$

cînd $(\rho,\varphi,s)\in B\cap T(p_\varepsilon)$

Atunci pentru $r\in(0,p_\varepsilon)$, rezultă:

$$\left|\int_{T_i(p)} \vec{u}\,\mathbb{T}\vec{n}\, da\right| \le \int_{T_i(p)} |u_j||T_{je}n_e|\, da \le \sum_{\ell=1}^{3}\int_{T_i(p)} |u_j||T_{je}|\, da \le$$

$$\le \sum_{\ell=1}^{3}\int_{T_i(p)} (u_j^*+\varepsilon)\rho^{\frac{1}{2}}(T_{je}^*+\varepsilon)\rho^{-\frac{1}{2}}\, da \le \sum_{\ell=1}^{3}\int_{T_i(p)} (u_j^*+\varepsilon)(T_{je}^*+\varepsilon)\, da$$

în ultimul termen integrantul depinde doar de s şi este mărginit, suprafaţa de integrare tinde la o cînd $p\to 0$, astfel termenul converge la zero demonstrînd prima limită din (8).

A doualimită din (8) rezultă din următoarea serie de inegalităţi:

$$\left|\int_{B\cap T(p)} \mathbb{T}\cdot\mathbb{E}\, dv\right| \le \int_{B\cap T(p)} |C_{ijke}E_{ij}E_{ke}||J|\, d\rho\, d\varphi\, ds \le$$

Integrantul se comportă atunci ca ρ^{-1}, elementul de volum dv ca ρ^{1} conform (2), ceea ce implică convergența integralei ([5], cap.IV,§5

Bazîndu-ne pe această propoziție enunțăm rezultatul fundamental:

<u>Teorema de unicitate:</u> Fie $\vec{u}$ o soluție a problemei la limită în deplasări:

$$\operatorname{div} \mathbb{T}(\vec{u}) + \vec{b} = 0 \quad , \quad \mathbb{T}(\vec{u}) = C[\mathbb{E}(\vec{u})] \quad \text{pe } B \; ,$$

Cu condițiile la limită:

$$\mathbb{T}(\vec{u})\vec{n} = \vec{f} \quad \text{pe } S_e \quad , \quad \mathbb{T}(\vec{u})\vec{n} = \vec{g} \quad \text{pe } S_i \setminus L \; ^{2)} \; ;$$

în plus presupunem că:

$$\text{(a)} \; \vec{b} \in C^0(B) \qquad \vec{f} \in C^0(S_e) \qquad \vec{g} \in C^0(S_i \setminus L)$$

$$\vec{b} \text{ este } O_L(\rho^{-1}) \quad \text{și} \quad \vec{g} \text{ este } O_L(\rho^{-\frac{1}{2}}) \text{ cînd } \rho \to 0$$

Atunci $\vec{u}$ este unică în clasa $A(1/2)$, modulo o deplasare rigidă.

<u>Demonstrație:</u> Am presupus că C, tensorul elasticității este simetric și pozitiv definit. Este suficient ([2],Sect.28,32) să demonstrăm că teorema despre lucrul mecanic și energie are loc pentru corpul B cu comportamentul dat al cîmpurilor. Adică:

$$(4) \qquad 2U_B = \int_B \vec{b} \cdot \vec{u} \, dv + \int_{S_i \setminus L} \vec{g} \cdot \vec{u} \, da + \int_{S_e} \vec{f} \cdot \vec{u} \, da$$

Am stipulat că $\vec{u}$ este $O_L(\rho^{\frac{1}{2}})$ cînd $\rho \to 0$, deci conform ipotezei (a) integranții primelor integrale se comportă ca ρ^{-1} respectiv ρ^{0} cînd $\rho \to 0$. Elementul de volum dv se comportă ca ρ^{1}, iar cel de suprafață da ca ρ^{0} ceea ce demonstrează că integralele din membrul drept a lui (4) există ([5], cap.IV,§5).

Egalitatea (3) poate fi înlocuită cu :

$$(5) \qquad 2U_B = \int_{B \setminus T(p)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{E} \, dv + \int_{B \cap T(p)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{E} \, dv \; ,$$

unde $p \in (0, R_m)$ iar $T(p)$ reprezintă o vecinătate tubulară a liniei singulare definită de

$$T(p) = \bigcup_{s \in [0, s_0]} \{(\rho, \varphi, s) \mid (\rho, \varphi, s) \mid \rho \in [0, p), \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

ipotezele uzuale ale teoremei despre lucrul mecanic și energie sînt satisfăcute pe $B \setminus T(p)$, deci:

$$\int_{B \setminus T(p)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{E} \, dv = \int_{B \setminus T(p)} \vec{b} \cdot \vec{u} \, dv + \int_{\partial(B \setminus T(p))} \vec{u} \cdot \mathbb{T} \vec{n} \, da$$

Astfel, considerînd că $\partial(B \setminus T(p)) = S_e \cup S_i(p) \cup T_i(p)$ cu notațiile din figura 2 și că $\mathbb{T}\vec{n} = \vec{f}$ pe S_e și $\mathbb{T}\vec{n} = \vec{g}$ pe S_i, ecuația (4) devine:

---

2) $\vec{n}$ reprezintă normala exterioară la frontiera la frontiera considerată.

unde R_m reprezintă raza de curbură minimă a liniei L. Proprietăţile presupuse ale lui L, implică existenţa lui R_m şi faptul că $R_m>0$
$R_m > 0$.

Jacobianul transformării este :

(2) $\quad J = \rho\,[1 - \rho\,(\ell_2'' \ell_1' - \ell_2' \ell_1'')\cos\varphi\,]$.

Fie $\varphi_i : [0, R_m) \times [0, s_0] \longrightarrow [0, 2\pi)$; $i = 1, 2$ definite prin :

$\varphi_1(\rho, s) = \inf\{\varphi \in [0, 2\pi) \mid (\rho, \varphi, s) \in B\}$ $\quad \varphi_2(\rho, s) = \sup\{\varphi \in [0, 2\pi) \mid (\rho, \varphi, s) \in B\}$

Atunci unghiul penei lui Cherepanov este $\varphi_2(s) - \varphi_1(s)$

unde $\varphi_i(s) = \lim\limits_{\rho \to 0} \varphi(\rho, s)$; $i = 1, 2$.

Despre o funcţie continuă $f : B \to \mathbb{R}$ vom spune că este $O_L(\rho^k)$, $k \in \mathbb{R}$, cînd $\rho \to 0$, dacă şi numai dacă:

(o) există o funcţie mărginită $f^* : [0, s_0] \to \mathbb{R}_+$ astfel încît pentru fiecare $s \in [0, s_0]$ avem :

i) pentru orice $\varphi \in [\varphi_1(s), \varphi_2(s)]$ şi orice funcţie continuă $\psi : [0, R_m) \longrightarrow [0, 2\pi)$ cu $\psi(0) = \varphi$ şi $\varphi_1(\rho, s) \le \psi(\rho) \le \varphi_2(\rho, s)$ existenţa limitei $\lim\limits_{\rho \to 0} f(\rho, \psi(\rho), s)\rho^{-k}$;

ii) îndeplinirea următoarei inegalităţi:

$$\lim_{\rho \to 0} | f(\rho, \psi(\rho), s)\rho^{-k} | \le f^*(s)$$

Trebuie să folosim o inegalitate pentru că în general limita depinde de unghiul φ ([4], cap.3, §3) .

Similar spunem cîmpul tensorial T, de ordin m, este $O_L(\rho^k)$, $k \in \mathbb{R}$ cînd $\rho \to 0$ dacă fiecare componentă satisface condiţia (o). Cu $T^*_{i_1 \ldots i_m}$ notăm funcţia pentru care are loc inegalitatea următoare:

$$\lim_{\rho \to 0} | T_{i_1 \ldots i_m}(\rho, \psi(\rho), s)\rho^{-k} | \le T^*_{i_1 \ldots i_m}(s)$$

§ 4. TEOREMA DE UNICITATE

In mod obişnuit definim energia de deformare prin

(3) $\quad U_B\{E\} = \int_B T \cdot E \, dv$

Dar cum deformaţia şi tensiunea se comportă ciudat în vecinătatea liniei singulare trebuie să demonstrăm că integrală există într-adevăr .

Vom nota $A(k)$, $k \in \mathbb{R}$ următoarea clasă de deplasări admisibile:

$$A(k) = \{\vec{u} : B \to \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} \in C^3(B),\ \vec{u} \text{ este } O_L(\rho^k) \text{ cînd } \rho \to 0\}$$

In continuare demonstrăm următoarea:

<u>Propoziţie</u> : Pentru fiecare cîmp de deplasări admisibile $\vec{u} \in A(1/2)$ avem: $\quad U_B = \int_B T \cdot E < \infty$

<u>Demonstraţie</u>: cîmpul de deplasări $\vec{u}$ este $O_L(\rho^{\frac{1}{2}})$ cînd $\rho \to 0$. Deci E şi T date de (1) sînt $O_L(\rho^{-\frac{1}{2}})$ cînd $\rho \to 0$.

$$\leq 2\pi M \rho |C_{ijkl}| \int_0^{s_0} (E_{ij}^* + \varepsilon)(E_{kl}^* + \varepsilon)\, ds$$

unde M reprezintă $\sup\{|1-\rho(l_2''l_1'-l_1''l_2')\cos\varphi| \mid (\rho,\varphi,s)\in T(\rho_\varepsilon)\cap B\}$

Astfel trecînd la limită cu $\rho \to 0$, în (6), ajungem folosind (7) şi (8) la concluzia (4).

§7 . CONCLUZII

Teorema de unicitate a fost stabilită impunînd un comportament de $O_L(\rho^{\frac{1}{2}})$ cînd $\rho \to 0$ pentru deplasări. Demonstraţiile prezentate, care implică convergenţa integralelor energetice, rămîn valabile pentru deplasări $\vec{u}$ de $O_L(\rho^k)$ cu $k \geq \frac{1}{2}$. Am ales $k = \frac{1}{2}$ numai datorită faptului că acesta este cazul fisurilor în elasticitate lineară. Pentru elasticitate neliniară un raţionament similar permite enunţarea unor condiţii de unicitate de acelaşi tip.

Autorul doreşte să mulţumească profesorului său Dr. E. SOÓS Pentru discuţiile şi încurajările primite în cursul elaborării acestei lucrări.

REFERINŢE

1. Г.П. Черепанов - Механика хрупкопо разрушеня, Москва, Наука, 1974

2. M.E. GURTIN - The linear Theory of Elasticity, în Handbuch der Physik VI a/2, ed.C.Truesdell, Berlin, Springer Verlag, 1972

3. N.I. MUSHELISWILI - Cîteva probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticităţii, Bucureşti Ed. Academiei R.S.R. , 1956

4. I.N.SNEDON şi M.LOWENGRUB - Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity, New York, J.Wiley, 1969.

5. A.N.TIHONOV şi A.A. SAMARSKI - Ecuaţiile fizicii matematice Bucureşti, Ed.Tehnică, 1956.